

Funzioni 1

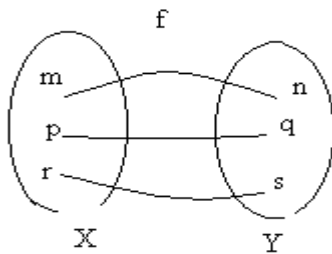
Una funzione f da X in Y è costituita da una terna di elementi

- 1) un insieme X , detto **dominio** di f
- 2) un insieme Y , detto **codominio** di f
- 3) una **legge** che ad un elemento x di X associa al più un unico elemento $f(x)$ di Y .

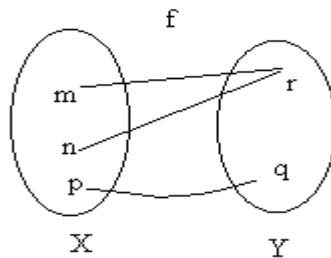
Nel caso, in cui X, Y siano sottinsiemi di R , generalmente si indica con

D il campo di esistenza, o anche insieme di definizione di una funzione f , che è il più ampio sottoinsieme di R costituito da tutti e soli i valori della x per cui esistano ben definiti i corrispondenti valori di $y = f(x)$. (Ad esempio, nel caso di una frazione occorre porre il denominatore diverso da zero); Il **codominio** C di f invece è il sottoinsieme di R costituito da tutti gli elementi y corrispondenti dei punti x appartenenti al dominio della funzione

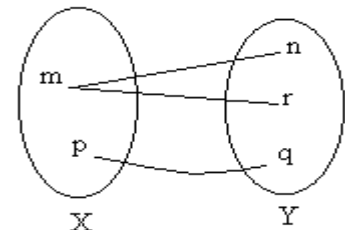
Si dice che x la variabile **indipendente**, mentre $f(x)$ o y è la **variabile dipendente**.



f è una funzione



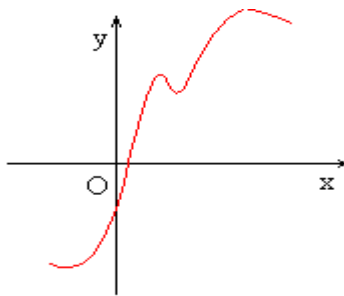
f è una funzione



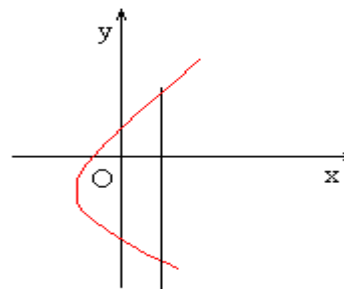
f non è una funzione

Data una **funzione** $f: X \rightarrow Y$ si chiama **grafico** di f l'insieme (x, y) dei punti soddisfacenti la condizione $y = f(x)$

Se consideriamo il grafico di una funzione: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ogni retta verticale interseca il grafico della funzione al più una volta.



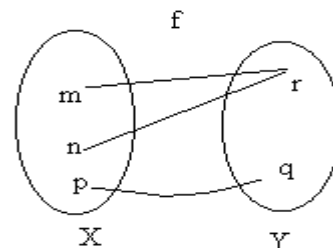
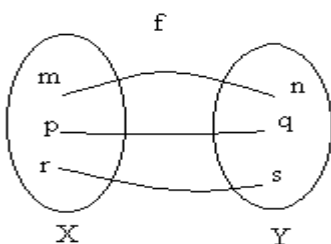
è il grafico di una funzione



non è il grafico di una funzione

L'insieme degli $y \in R$ per i quali esiste un $x \in R$ tale che $y = f(x)$ si dice *immagine* di f .

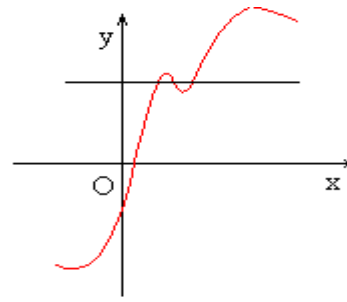
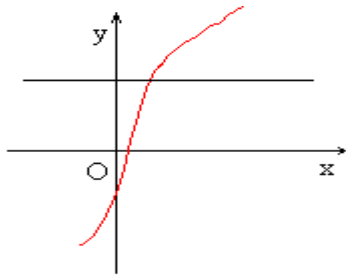
Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice *iniettiva* se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ segue che $f(x_1) \neq f(x_2)$



f è iniettiva

f non è iniettiva

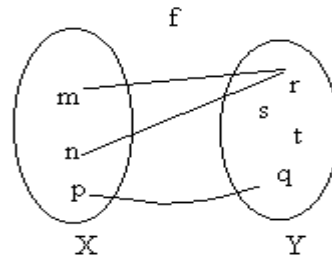
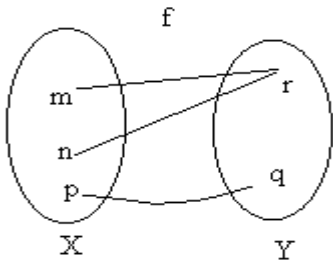
Se consideriamo il grafico di una funzione: $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ si può osservare che f è iniettiva se ogni retta orizzontale incontra il grafico al più una sola volta.



f è iniettiva

f non è iniettiva

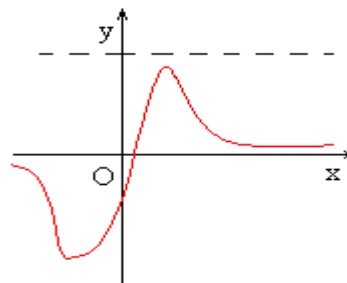
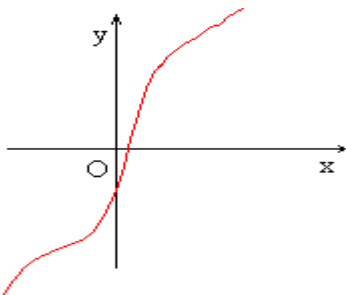
Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.



f è suriettiva

f non è suriettiva

Considerando le funzioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dal grafico si può osservare che f è suriettiva se ogni retta orizzontale incontra il grafico almeno una volta.

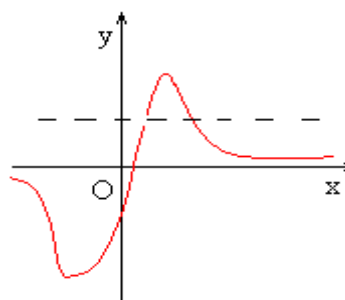
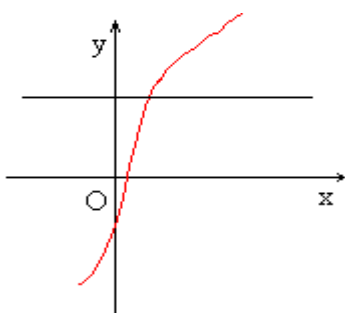


f è suriettiva

f non è suriettiva

Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice *biiettiva* o *biunivoca* se è suriettiva e iniettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste uno ed un solo $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

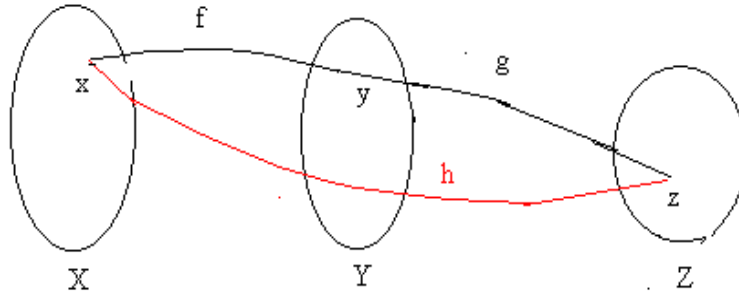
Considerando le funzioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dal grafico si può osservare che f è *biunivoca* se ogni retta orizzontale incontra il grafico una e una sola volta.



f è biunivoca

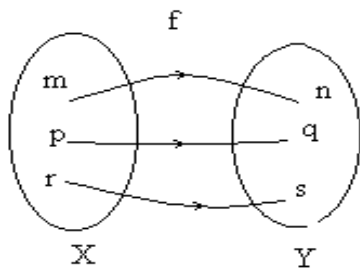
f non è biunivoca

Date due funzioni $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ si definisce *funzione composta* e si indica con $g \circ f$ la funzione $h: X \rightarrow Z$ tale che $h(x) = g(f(x))$



osserviamo che: $y = f(x)$, $z = g(y)$, quindi $z = g(f(x))$, $z = h(x)$.

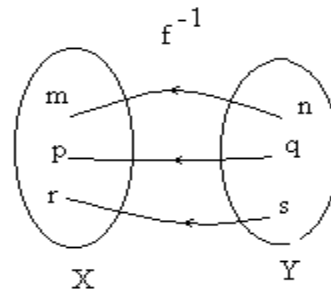
Data $f: X \rightarrow Y$, biunivoca, si definisce sua funzione inversa e si indica con f^{-1} la funzione $f^{-1}: Y \rightarrow X$ tale che $f^{-1}(y) = x$ se $f(x) = y$.



$$f(m) = n$$

$$f(p) = q$$

$$f(r) = s$$

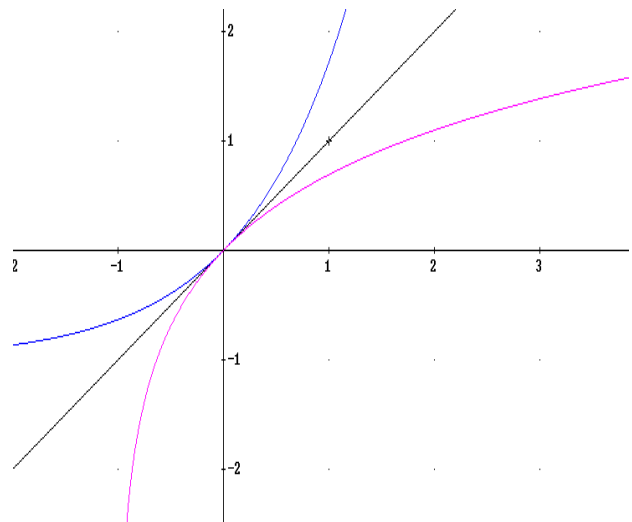


$$f^{-1}(n) = m$$

$$f^{-1}(q) = p$$

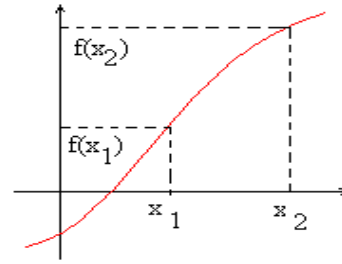
$$f^{-1}(s) = r$$

Considerando le funzioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dal grafico si può osservare che se il punto di coordinate $(x, y) \in f$ allora il punto di coordinate $(y, x) \in f^{-1}$, quindi il grafico della funzione inversa sarà simmetrico di quello della funzione stessa rispetto alla bisettrice $y = x$



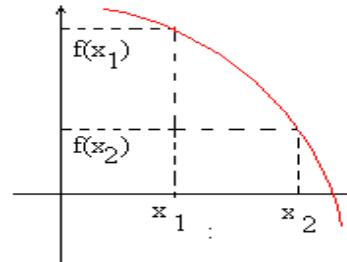
Data $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ diciamo che f è *crescente* se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ è:
 $f(x_1) < f(x_2)$

Graficamente si ha:

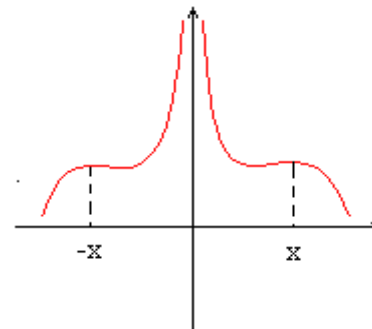


Data $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ diciamo che f è *decrescente* se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ è:
 $f(x_1) > f(x_2)$.

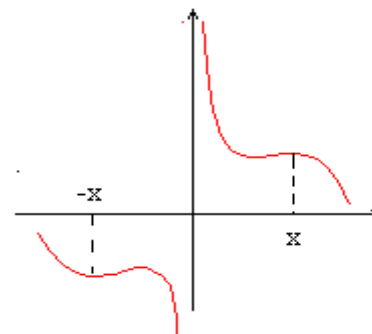
Graficamente si ha:



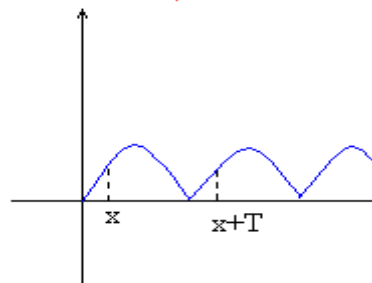
Una funzione $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ definita su un dominio X simmetrico si dice *pari* se per $\forall x \in X$ è: $f(-x) = f(x)$



Una funzione $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ definita su un dominio X simmetrico si dice *dispari* se per ogni $\forall x \in X$ è: $f(-x) = -f(x)$



Una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *periodica di periodo T* se $\forall x \in \mathbf{R}$ è: $f(x+T) = f(x)$



Definizione:

- una funzione $f: X \rightarrow Y$, con $X, Y \subset \mathbf{R}$ si dice *limitata* se $f(X)$ è limitato, cioè se $\exists c, C: c \leq f(x) \leq C, \forall x \in X$.

- una funzione $f: X \rightarrow Y$, con $X, Y \subset \mathbf{R}$ si dice *limitata superiormente* se $f(X)$ è limitato superiormente, cioè se $\exists C: f(x) \leq C, \forall x \in X$.
- una funzione $f: X \rightarrow Y$, con $X, Y \subset \mathbf{R}$ si dice *limitata inferiormente* se $f(X)$ è limitato inferiormente, cioè se $\exists c: f(x) \geq c, \forall x \in X$.

LEGENDA

D = dominio della funzione

C = codominio della funzione

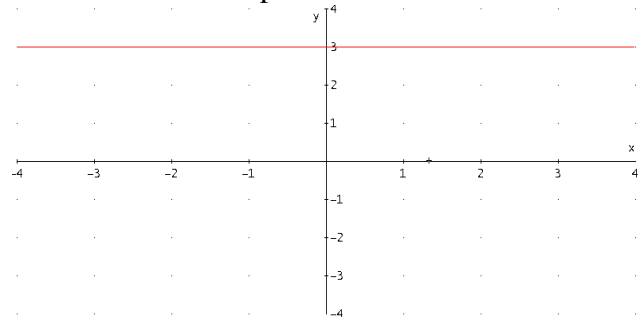
FUNZIONI ALGEBRICHE

Funzione costante

$$y = c$$

$$D = \mathbf{R} \quad C = \{c\}$$

Retta parallela all'asse



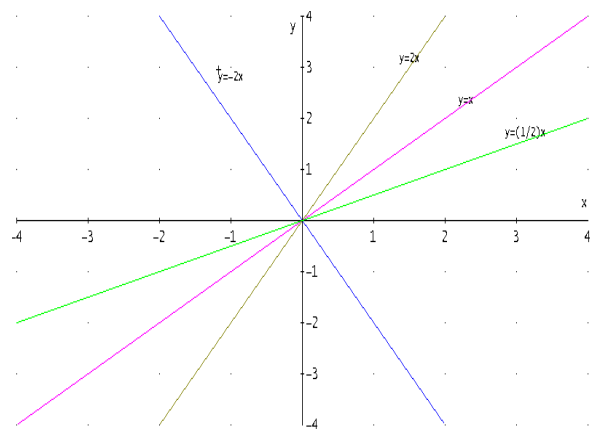
Funzione lineare (Funzione di 1° grado)

$$y = mx$$

$$D = \mathbf{R} \quad C = \mathbf{R}$$

- Funzione dispari
- Con $m \neq 0$ esiste $f^{-1}: x = y/m$ da cui

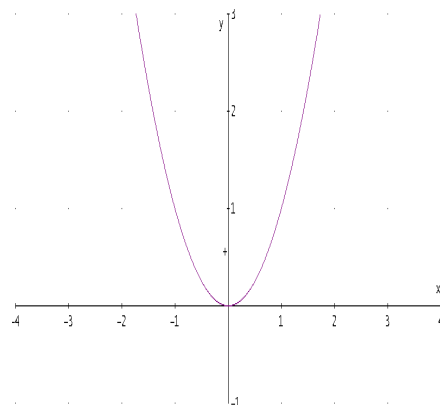
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{m} x$$
- Funzione illimitata sia inferiormente che superiormente



Parabola (Funzione di 2° grado)

$$D = \mathbf{R} \quad y = x^2 \quad C = [0, +\infty)$$

- Funzione pari
- Non esiste f^{-1} su \mathbf{R} , la funzione è invertibile per $x \geq 0$ aut per $x \leq 0$
- La funzione è decrescente per $x \leq 0$, e crescente per $x \geq 0$
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente

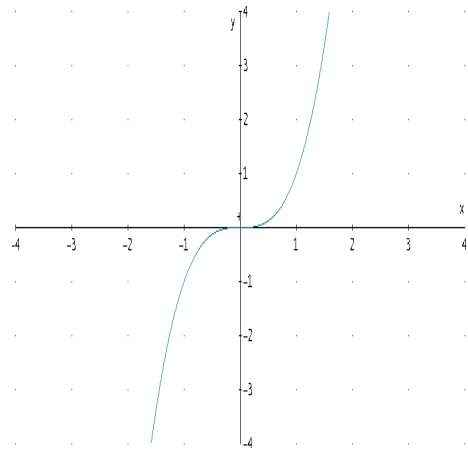


Cubica (Funzione di 3° grado)

$$y = x^3$$

$$D = \mathbb{R} \quad C = \mathbb{R}$$

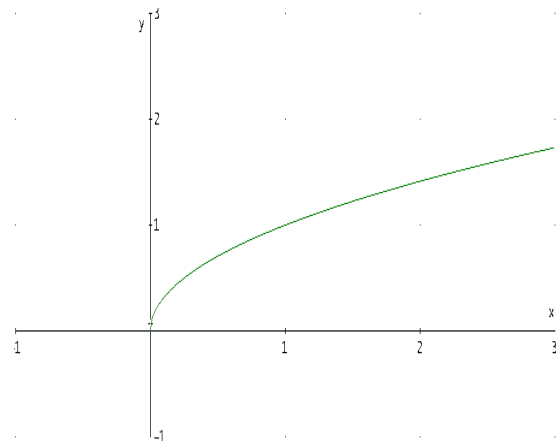
- Funzione dispari
- Funzione biunivoca
- Esiste $f^{-1} : x = \sqrt[3]{y}$ da cui $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
- La funzione è monotona crescente
- Funzione illimitata sia inferiormente che superiormente



$$y = \sqrt{x}$$

$$D = [0, +\infty) \quad C = [0, +\infty)$$

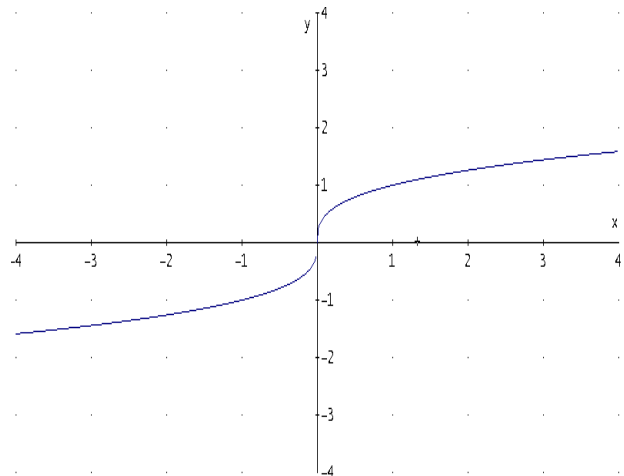
- Esiste $f^{-1} : x = y^2$ da cui $f^{-1}(x) = x^2$
- La funzione è crescente
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente



$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$A = \mathbb{R} \quad C = \mathbb{R}$$

- Funzione dispari
- Funzione biunivoca
- Esiste $f^{-1} : x = y^3$ da cui $f^{-1}(x) = x^3$
- La funzione è monotona crescente
- Funzione illimitata sia superiormente che inferiormente



Iperbole equilatera

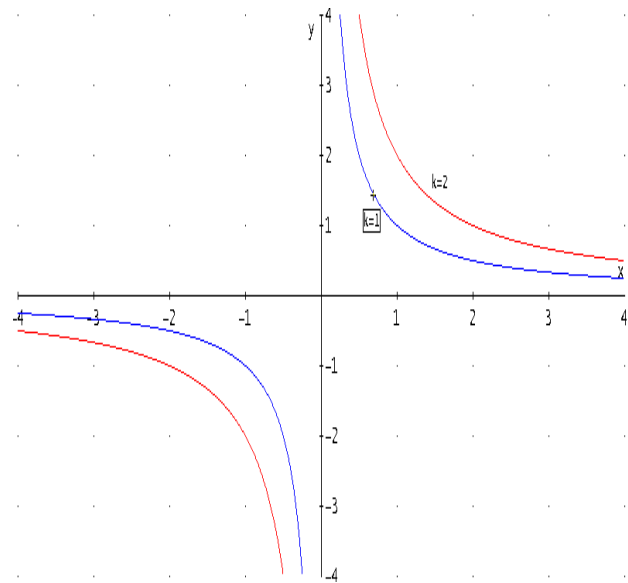
$$y = \frac{k}{x}$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\} \quad C = \mathbb{R} - \{0\}$$

- Funzione dispari
- Esiste $f^{-1} : x = k/y$ con $x \neq 0$ e $y \neq 0$
- La funzione è decrescente per $x < 0$, è

decescente per $x > 0$ non è decrescente nel suo dominio

- Funzione illimitata sia superiormente che inferiormente

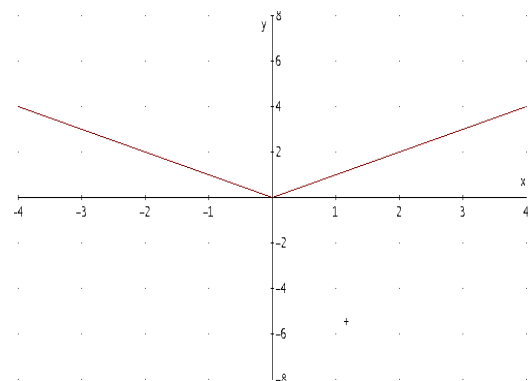


Funzione valore assoluto

$$y = |x|$$

$$D = \mathbb{R} \quad C = [0, +\infty)$$

- Funzione pari
- Non esiste f^{-1}
- La funzione è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente



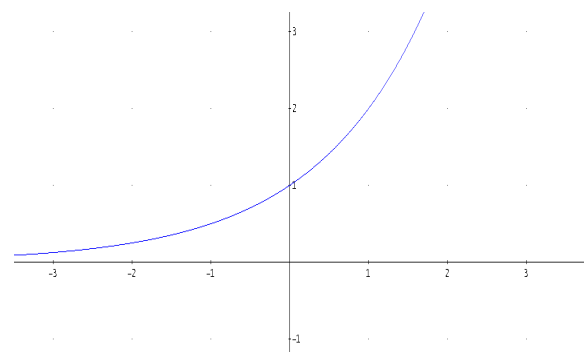
FUNZIONI TRASCENDENTI

Funzione esponenziale $y = a^x$

$a > 1$ funzione crescente $x > y \Rightarrow a^x > a^y$

$$D = \mathbb{R} \quad C = [0, +\infty)$$

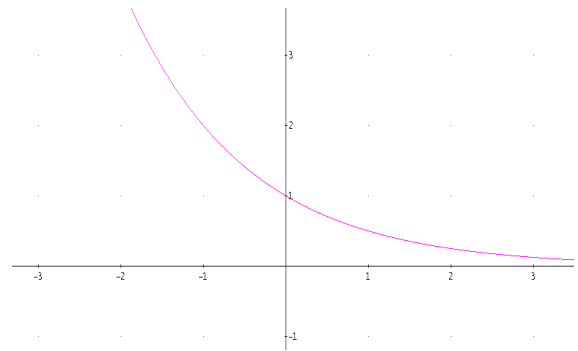
- Funzione biunivoca in D
- Esiste $f^{-1} : x = \log_a y$ da cui $f^{-1}(x) = \log_a x$
- Funzione monotona crescente
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente



$$0 < a < 1 \quad x > y \Rightarrow a^x < a^y$$

$$D = \mathbb{R} \quad C = [0, +\infty)$$

- Funzione biunivoca in D
- Esiste $f^{-1} : x = \log_a y$ da cui $f^{-1}(x) = \log_a x$
- Funzione monotona decrescente
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente

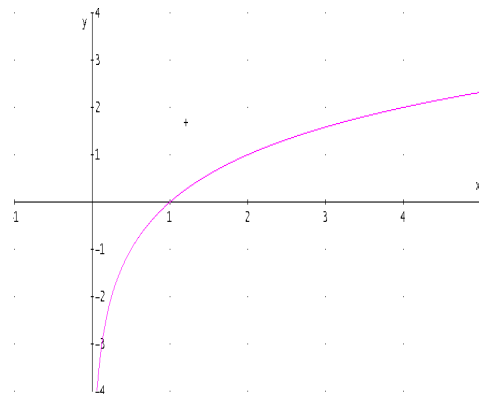


Funzione logaritmica $y = \log_a x$

$$a > 1$$

$$D = [0, +\infty) \quad C = \mathbb{R}$$

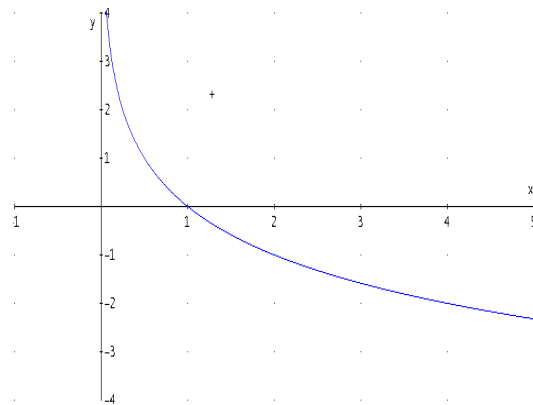
- Funzione biunivoca in D
- Esiste $f^{-1} : x = a^y$ da cui $f^{-1}(x) = a^x$
- Funzione monotona crescente
- Funzione illimitata sia superiormente che inferiormente



$$0 < a < 1$$

$$D = [0, +\infty) \quad C = \mathbb{R}$$

- Funzione biunivoca in D
- Esiste $f^{-1} : x = a^y$ da cui $f^{-1}(x) = a^x$
- La funzione è monotona decrescente
- Funzione limitata sia superiormente che inferiormente

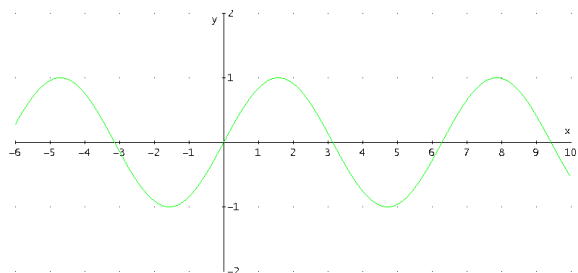


Funzioni goniometriche

$$y = \text{sen}x$$

$$D = \mathbb{R} \quad C = [-1; 1]$$

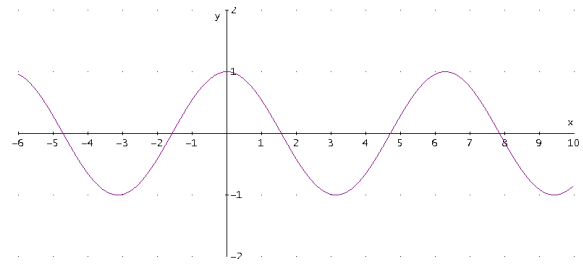
- Funzione periodica di periodo 2π
- Funzione dispari
- Per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ esiste f^{-1} :
 $x = \text{arcsen}y$ da cui $f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$
- Funzione limitata sia superiormente che inferiormente



$$y = \cos x$$

$$D = \mathbb{R} \quad C = [-1; 1]$$

- Funzione periodica di periodo 2π
- Funzione pari
- Per $0 \leq x \leq \pi$ esiste $f^{-1} : x = \arccos y$ da cui $f^{-1}(x) = \arccos x$
- Funzione limitata sia superiormente che inferiormente



$$y = \operatorname{tg} x$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad C = \mathbb{R}$$

- Funzione periodica di periodo π
- Funzione dispari
- Per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ esiste $f^{-1} : x = \operatorname{arctg} y$ da cui $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$
- Funzione illimitata

